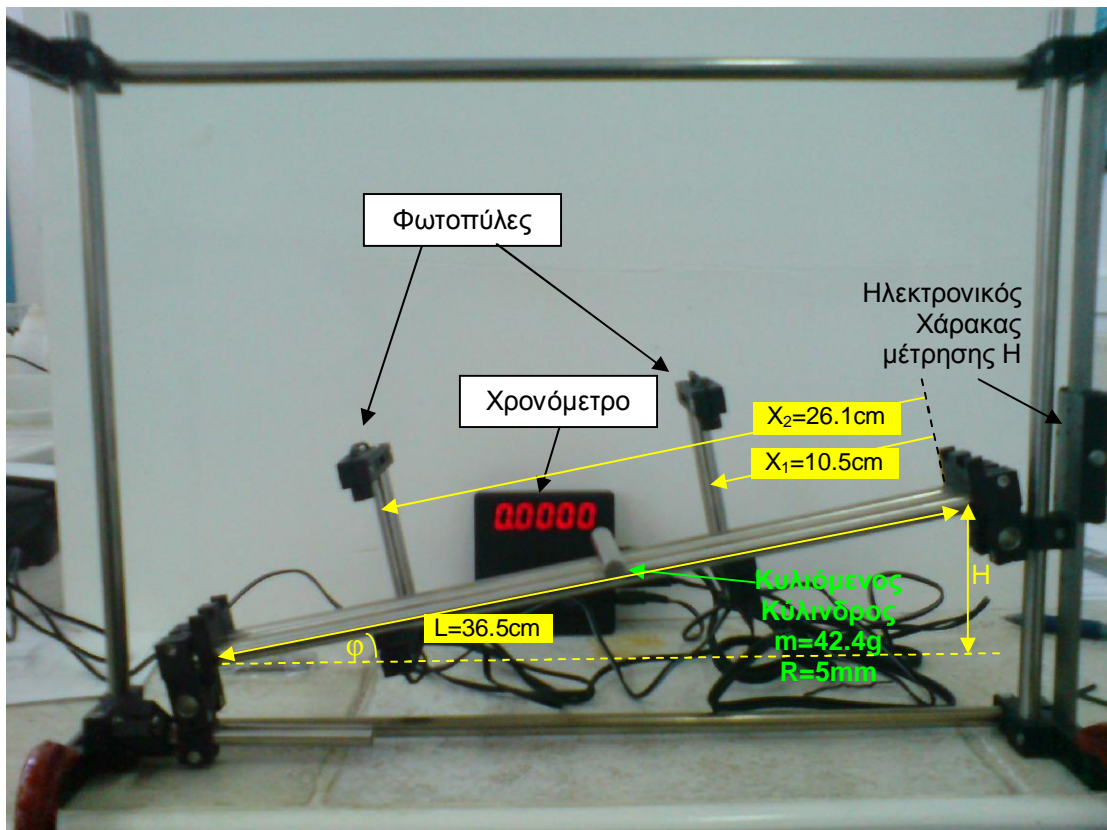


Προσδιορισμός Ροπής Αδράνειας με φωτοπύλες και ηλεκτρονικό χρονόμετρο

Κορδάς Γιώργος – Φυσικός MSc.
ΕΚΦΕ Ρόδου – Ιανουάριος 2011

Εισαγωγή

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος στην περιστροφική κίνηση παίζει παρόμοιο ρόλο με τη μάζα στη μεταφορική. Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί θεωρητικά ιδιαίτερα αν το σώμα έχει πολύπλοκο σχήμα. Μ' αυτό το πείραμα κύλισης σε κεκλιμένο επίπεδο, μπορούμε σχετικά εύκολα να την προσδιορίσουμε κάνοντας χρήση μιας διάταξης φωτοπυλών που χρονομετρεί τα περάσματα του σώματος απ' αυτές. Το πείραμα στοχεύει πρώτα στη δημιουργία του διαγράμματος της επιτάχυνσης με το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου. Αυτό το διάγραμμα είναι μια ευθεία που περνά απ' την αρχή των αξόνων, η κλίση της οποίας εξαρτάται απ' τη ροπή αδράνειας. Συνεπώς προσδιορίζοντας την κλίση μπορούμε να υπολογίσουμε και τη ροπή αδράνειας. Επίσης πρέπει να ανυψώσουμε το κεκλιμένο επίπεδο μέχρι το σημείο που έχουμε μόνο κύλιση και όχι και ολίσθηση. Δηλαδή θα πρέπει η στατική τριβή που παίζει το ρόλο της αιτίας της κύλισης να είναι μικρότερη ή ίση με τη μέγιστη στατική τριβή. Παρακάτω δείχνουμε την πειραματική διάταξη.



Σχ. 1.: Η πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό της ροπής αδράνειας

Θεωρητική Ανάλυση: (Δυναμική Προσέγγιση)

$$(1) \Sigma F_x = ma_{cm} = mg\eta\mu\varphi - f_s$$

$$(2) \Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow f_s R = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Επειδή } \alpha_{cm} = dv_{cm} / dt = d(\omega R) / dt = R d\omega / dt = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$$

$$\eta (2) \Rightarrow f_s = I\alpha_{cm} / R^2$$

και συνεπώς η (1) $\Rightarrow ma_{cm} = mg\eta\mu\varphi - I\alpha_{cm} / R^2$ που καταλήγει στη ζητούμενη $a=f(H)$:

$$a_{cm} = \frac{mgh\eta\mu\varphi}{\frac{I}{R^2} + m} = \frac{mg}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)L} H \quad (3)$$

Συνθήκη μη ολίσθησης:

$$\text{Αφού } f_s = I\alpha_{cm} / R^2$$

$$f_s = \frac{mgh\eta\mu\varphi}{1 + mR^2 / I} \quad (4)$$

Η στατική τριβή αυξάνεται με τη γωνία φ , μέχρι να φτάσει τη μέγιστη $f_{smax} = \mu_s mg \sigma\eta\nu\varphi$. Αυξάνοντας περαιτέρω την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου θα έχουμε και ολίσθηση και τότε $v_{cm} \neq v_{\gamma\rho}$ και $a_{cm} \neq a_{\gamma\omega\nu} R$. Συνεπώς έχουμε μόνο κύλιση όταν

$$f_s < f_{smax} = \mu_s mg \sigma\eta\nu\varphi \quad (5)$$

ή όταν

$$e\eta\mu\varphi \leq \mu_s (1 + mR^2 / I) \quad (5')$$

Διαδικασία

Μετρήσεις της επιτάχυνσης για τα διάφορα ύψη λαμβάνονται έμμεσα απ' τις φωτοτύλες και το χρονομετρο. Το ηλεκτρονικό χρονοόμετρο μπορεί να τεθεί σε τρεις λειτουργίες:

- Επιλογή F1: Μετρά τη διάρκεια περάσματος του σώματος από μια φωτοτύλη,
- Επιλογή F2: Μετρά τη διαφορά χρόνου περάσματος του σώματος από δύο φωτοτύλες.
- Επιλογή F3: Μετρά διαφορά χρόνου τριών διαδοχικών περασμάτων από μια φωτοτύλη.

Μπορούμε λοιπόν να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση:

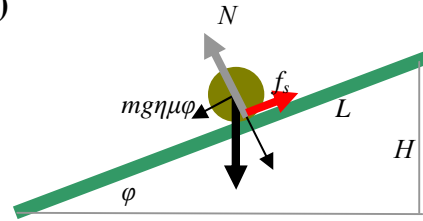
1. Είτε απ' τις δύο φωτοτύλες που βρίσκονται σε συγκεκριμένα σημεία του κεκλιμένου επιπέδου x_1, x_2 απ' την κορυφή του, μετρώντας τη χρονική διάρκεια περάσματος του κυλιόμενου σώματος απ' τα x_1, x_2 (λειτουργία χρονομέτρου: F2)

$$a_{cm} = \frac{2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2}{\Delta t^2} \quad (6)^1$$

2. Είτε βρίσκοντας τη στιγμιαία ταχύτητα σε ένα σημείο το κατατώτερο, το x_2 , γιατί εκεί έχουμε μεγαλύτερη ταχύτητα και επομένως μικρότερο σφάλμα διαφόρισης χρόνου (βλ. σχέση 7)

$$a_{cm} = \frac{u_2^2}{2x_2} \quad (6')$$

¹ Για την απόδειξη των σχέσεων (6), (6)' βλέπε σημείωση 2.



Η στιγμιαία ταχύτητα v_2 προσδιορίζεται απ' τη διαίρεση της διαμέτρου του αντικειμένου $2R$, προς τη χρονική διάρκεια Δt που δείχνει το χρονόμετρο στη λειτουργία F1.

$$v_2 = 2R/\Delta t \quad (7)$$

Το ύψος H , καθορίζεται και μετράται με ηλεκτρονικό χάρακα ακριβείας.

Μετρώντας λοιπόν για διάφορα ύψη H και ίδια x_1, x_2 τα Δt , ή το Δt απ' τη φωτοπύλη στο x_2 , υπολογίζουμε την επιτάχυνση με τις δύο μεθόδους που περιγράψαμε και δημιουργούμε το διάγραμμα $a(H)$. Στη συνέχεια εμφοτεύουμε ευθεία $y=kx+l$, η κλίση k της οποίας είναι ίση με την κλίση της ευθείας (3).

$$k = \frac{mg}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)L} \quad (8)$$

Απ' την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε τελικά τη ροπή αδράνειας

$$I = \left(\frac{g}{kL} - 1\right)mR^2 \quad (9)$$

Όμως πριν το διάγραμμα πρέπει να εξασφαλίσουμε συνθήκη μη ολίσθησης: Αν είναι δυνατό βρίσκουμε την μέγιστη γωνία με το ίδιο το σώμα θέτοντάς το σε μια μη κυλιόμενη διάσταση και ανυψώνοντας αργά το κεκλιμένο επίπεδο μέχρι το σώμα να ολισθήσει. Διαφορετικά πρέπει να βρούμε το συντελεστή στατικής τριβής. Στη συνέχεια παίρνουμε τις πρώτες μετρήσεις με χαμηλό ύψος H , και εμφοτεύουμε μια πρώτη ευθεία με κλίση k_{pr} απ' την οποία προσδιορίζουμε μια πρώτη I_{pr} . Στη συνέχεια βρίσκουμε τις επιτρεπόμενες φ .

$$efj \leq m_s(1 + mR^2 / I_{pr}) \quad (10)$$

Μετρήσεις - Αποτελέσματα:

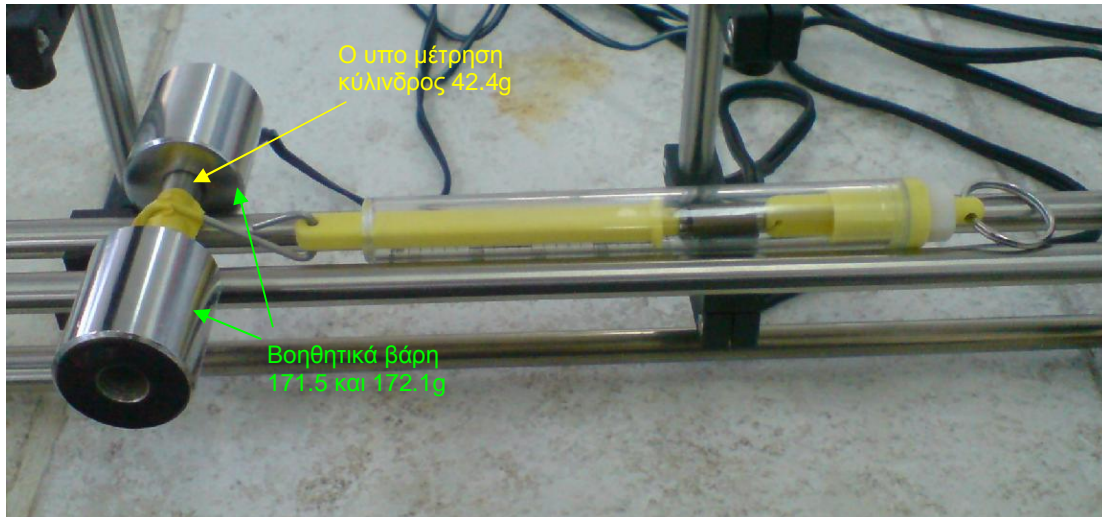
Θα υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ενός μεταλλικού κυλίνδρου ως προς το κέντρο του. Με χαρακτηριστικά: Ακτίνα $R=0.005m$ και μάζα $m=0.0424kg$. Το κεκλιμένο επίπεδο (ατσάλινες ράβδοι) έχει μήκος: $L=0.365m$. Θέτουμε τις φωτοπύλες σε απόσταση $X_1=10.5cm$ και $X_2=26.1cm$ απ' την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου ώστε ο κύλινδρος ακτίνας $0.5cm$ τελικά να διανύει $x_1=0.100m$ και $x_2=0.256m$ όταν περνάει απ' τις φωτοπύλες. (Αυτό γιατί δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε το κέντρο του κυλίνδρου ακριβώς στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, λόγω εσωτερικού τοιχώματος - Βλ σχήμα 1).

Σύμφωνα με θεωρητικούς υπολογισμούς $I_0=1/2 mR^2= 5.3 \cdot 10^{-07} \text{ kg m}^2$

Και οι επιτρεπτές γωνίες είναι $efj \leq m_s(1 + mR^2 / I) = 0.12 \cdot 3 = 0.36$ ή $\varphi \leq 20^\circ$ ή

$$ef^2j = \frac{H^2}{L^2 - H^2} \leq 0.36^2 \Rightarrow H \leq \frac{0.365m \cdot 0.36}{\sqrt{1 + 0.36^2}}. \text{ Δηλαδή θα πρέπει: } H \leq 0.124m$$

Σημείωση1: Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των επιφανειών προσδιορίστηκε πειραματικά και βρέθηκε $\mu_s=0.12$. Χρησιμοποιήθηκε δυναμόμετρο 0-1N, και προσθέσαμε βάρη 171.5gr + 172.1g στα 42.4g του κυλίνδρου για να πάρουμε καλύτερη μέτρηση. Με οριζόντια τη μπάρα των δύο σωλήνων δημιουργήσαμε τη διάταξη του επόμενου σχήματος:



Σχ. 2.: Η διάταξη προσδιορισμού του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και των δύο σωλήνων της διάταξης. Η μονωτική ταινία εξασφαλίζει τη μη κύλιση του κυλίνδρου.

Φροντίσαμε να εφάπτεται μόνο ο υπο μέτρηση κύλινδρος και όχι και οι δύο πλευρικοί του, στους δύο σωλήνες της διάταξης και φυσικά χωρίς δυνατότητα περιστροφής μεταξύ του γάντζου του δυναμόμετρου και των δύο αυτών σωλήνων. Πήραμε τις εξής τιμές: $f_{smax}=0.45N$ στο σώμα με ολική μάζα $0.386kg$. Με $g=9.81m/s^2$, προκύπτει ο προαναφερόμενος συντελεστής στατικής τριβής.

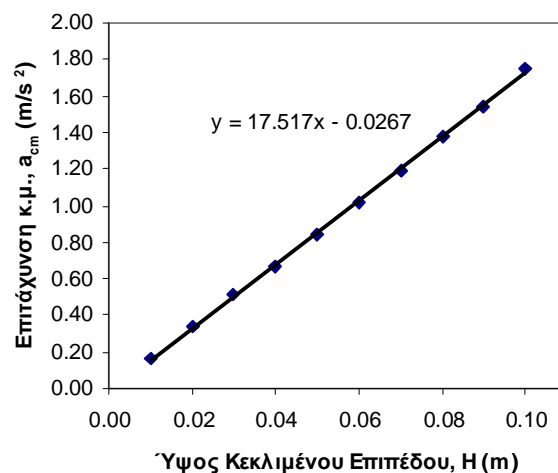
Ακολουθούν οι Πίνακες μετρήσεων, τα διαγράμματα και οι τιμές των ροπών αδράνειας για τις δύο μεθόδους. Απ' τις τρεις πρώτες μετρήσεις της μεθόδου 1, και με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω βρίσκουμε $\kappa_{\pi\rho}=17.412s^{-2}$, $I_{\pi\rho}=5.762 \cdot 10^{-07} kg m^2$. Οπότε οι επιτρεπτές γωνίες είναι

$$efj \leq m_s(1 + mR^2 / I_{pr}) = 0.12 \cdot (1 + 0.0424 \cdot 0.005^2 / 5.762 \cdot 10^{-7}) = 0.34 \text{ ή } \phi \leq 19^\circ$$

$$ef^2j = \frac{H^2}{L^2 - H^2} \leq 0.34^2 \Rightarrow H \leq \frac{0.365m \cdot 0.34}{\sqrt{1 + 0.34^2}}. \text{ Δηλαδή θα πρέπει: } H \leq 0.118m$$

Μέθοδος 1 (με δύο φωτοπύλες)

α/α	H (m)	Δt (sec)	a_{cm} (m/s^2)
1	0.01	0.6709	0.1600
2	0.02	0.4574	0.3441
3	0.03	0.3764	0.5082
4	0.04	0.3273	0.6721
5	0.05	0.2931	0.8381
6	0.06	0.2660	1.0176
7	0.07	0.2463	1.1869
8	0.08	0.2289	1.3742
9	0.09	0.2162	1.5404
10	0.10	0.2030	1.7472



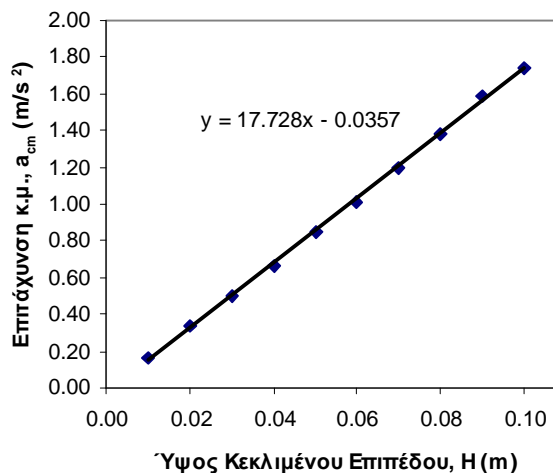
Σχ.3. Πίνακας μετρήσεων και διάγραμμα τιμών για τον πειραματικό προσδιορισμό της ροπής αδράνειας κυλίνδρου $m=0.0424kg$ και $R=0.005m$. Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των δύο φωτοπυλών-σημείων.

Η ευθεία εμφύτευσης έχει κλίση $\kappa=17.517s^{-2}$ και συνεπώς απ' την (9)

$$I= 5.614 \cdot 10^{-07} \text{ kg m}^2 \text{ (σφ.:5.92\%)}$$

Μέθοδος 2 (με μία φωτοπύλη)

α/α	H (m)	δt (sec)	υ (m/s)	a_{cm} (m/s ²)
1	0.01	0.0351	0.2849	0.1585
2	0.02	0.0239	0.4184	0.3419
3	0.03	0.0197	0.5076	0.5033
4	0.04	0.0172	0.5814	0.6602
5	0.05	0.0152	0.6579	0.8454
6	0.06	0.0139	0.7194	1.0109
7	0.07	0.0128	0.7813	1.1921
8	0.08	0.0119	0.8403	1.3792
9	0.09	0.0111	0.9009	1.5852
10	0.10	0.0106	0.9434	1.7383



Σχ.4. Πίνακας μετρήσεων και διάγραμμα τιμών για τον πειραματικό προσδιορισμό της ροπής αδράνειας κυλίνδρου $m=0.0424\text{kg}$ και $R=0.005\text{m}$. Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος μιας φωτοπύλης - σημείου.

Η ευθεία εμφύτευσης έχει κλίση $\kappa=17.728s^{-2}$ και συνεπώς απ' την (9)

$$I= 5.470 \cdot 10^{-07} \text{ kg m}^2 \text{ (σφ.:3.21\%)}$$

Σημείωση 2:

Συσχέτιση διαφοράς χρόνου - απόστασης δυο σημείων - επιτάχυνσης στην ΕΟΕΚ

Για τις μετατοπίσεις x_1 και x_2 ισχύουν οι σχέσεις: $x_1 = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2$ και $x_2 = \frac{1}{2} a_{cm} t_2^2$ από τις οποίες επιλύοντας ως προς t_1 και t_2 και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2x_2}{a_{cm}}} - \sqrt{\frac{2x_1}{a_{cm}}} \text{ και συνεπώς } \Delta t = \sqrt{\frac{2}{a_{cm}}} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \text{ , απ' την οποία προκύπτει η (6)}$$

Συσχέτιση απόστασης - ταχύτητας - επιτάχυνσης στην ΕΟΕΚ

$$v = a_{cm} t, \quad x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Rightarrow v^2 = 2a_{cm} x \text{ απ' την οποία προκύπτει η (6')}$$

Συμπεράσματα:

Και οι δύο μέθοδοι αποτελούν αξιόπιστους τρόπους προσδιορισμού των ροπών αδράνειας. Στη μέθοδο της μιας φωτοπύλης απλά τίθεται επιπλέον θέμα προσέγγισης της διαφορικότητας. Έτσι απ' τη μια θέλουμε το σώμα να έχει μεγάλη ταχύτητα για να τείνει το δt στο dt και να λαμβάνουμε έτσι όντως τη στιγμιαία ταχύτητα, απ' την άλλη αυτό οδηγεί το χρονόμετρο στα όρια της διακριτικής του ικανότητας. Αν έχουμε αυτό κατά νου και λόγω του απλούστερου της διάταξης η μέθοδος της μιας φωτοπύλης είναι προτιμότερη.